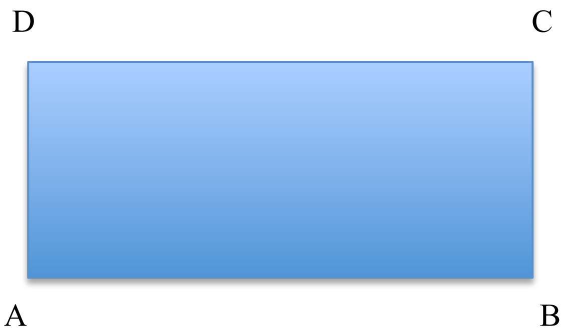
Giovanni Panzera

GEOMETRIE

NON - EUCLIDEE



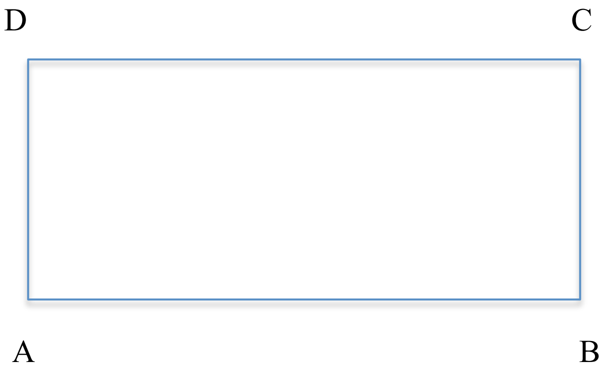
1972

Euclide, nei suoi trattati di geometria, enunciò cinque *postulati*, cioè cinque proposizioni non dimostrabili, ma immediatamente evidenti. Essi possono essere espressi nella forma seguente:

1. Da qualunque punto si può condurre una retta a un qualsiasi altro punto.
2. Ogni retta può essere prolungata indefinitamente.
3. È sempre possibile costruire un cerchio che abbia il centro in un punto qualsiasi e il raggio di lunghezza qualsiasi.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali.
5. Se una retta, incontrando altre due rette, forma con esse, da una medesima parte, due angoli interni la cui somma sia minore di due angoli retti, quelle due rette prolungate indefinitamente si incontrano dalla parte dalla quale stanno gli angoli la cui somma è minore di due angoli retti.

Di questi cinque postulati, i primi quattro sono effettivamente *immediatamente evidenti*, mentre il quinto è troppo lungo, complesso e troppo *non immediatamente evidente*, per la qual cosa molti studiosi hanno cercato di dimostrare il quinto postulato sulla base dei primi quattro, in modo di eliminarlo dall'elenco suddetto.

Si può affrontare il quinto postulato di Euclide considerando il seguente quadrilatero:



Supponiamo per ipotesi che gli angoli interni in A e in B siano retti e che i lati AD e BC siano uguali fra loro. Sulla base del quinto postulato si dimostra che i lati DC e AB sono fra loro uguali e che gli angoli interni in C e in D sono retti (si dimostra cioè che il quadrilatero dato è un rettangolo).

Per secoli i più grandi studiosi hanno cercato di giungere a tale conclusione usando solo i primi quattro postulati di Euclide, ma ogni risultato è stato vano, riuscendo al più a dimostrare che gli angoli interni in C e in D sono fra loro uguali, ma non necessariamente retti.

Il primo studioso che abbia introdotto un metodo completamente nuovo, che in duemila anni nessuno aveva mai pensato di applicare al quinto postulato di Euclide, fu l'italiano Girolamo Saccheri (1667 – 1733), un gesuita professore di matematica all'università di Pisa. Egli cominciò con l'ipotizzare che il quinto postulato di Euclide fosse *falso*, sostituendolo con un altro che lo contraddicesse.

Nel caso del quadrilatero suddetto esistono due postulati che possono sostituire il quinto di Euclide e che lo contraddicono: l'uno afferma che gli angoli interni in C e in D sono entrambi ottusi e l'altro che gli stessi angoli sono entrambi acuti. Il Saccheri progettò di costruire una geometria basata sui primi quattro postulati di Euclide più un *quinto alterno*, fino a giungere a una contraddizione. Ripetendo tale procedimento per entrambi i postulati alterni, il Saccheri si proponeva di dimostrare la validità del quinto postulato di Euclide.

Saccheri cominciò con l'ipotizzare che entrambi gli angoli interni in C e in D fossero maggiori di un angolo retto. Con questa ipotesi, più i primi quattro postulati di Euclide, egli costruì quella che potrebbe essere definita la *geometria ottusa*. Presto però si imbatté in una contraddizione, che significava, in ultima analisi, che la *geometria ottusa* non poteva essere vera.

Questo risultato fu così importante che da allora il quadrilatero suddetto fu denominato *quadrilatero di Saccheri*.

Soddisfatto dei risultati ottenuti, Saccheri affrontò allora la *geometria acuta*, partendo dall'ipotesi che entrambi gli angoli interni in C e in D fossero minori di un angolo retto. Lo studioso si accinse a tale lavoro sicuro che avrebbe presto trovato una contraddizione anche nella *geometria acuta*. Ma, avanzando nei suoi studi, il Saccheri non si imbatteva in alcuna contraddizione: si trovava sempre più di fronte a una geometria del tutto coerente con se stessa, una geometria *non-euclidea* che poteva sembrare contraria al buon senso, ma internamente coerente e perciò matematicamente valida.

Saccheri, matematico di gran valore, era però anche gesuita ed essere umano e gli manco perciò il coraggio di accettare una geometria non-euclidea. La geometria di Euclide, infatti, era considerata una verità assoluta e confutarla significava mettere in dubbio qualsiasi altra verità assoluta, per la qual cosa un attacco contro Euclide si sarebbe potuto interpretare come un attacco anche contro le verità religiose. Pertanto, quando si accorse di essersi spinto troppo avanti, dimostrò con artificiose argomentazioni di aver trovato una contraddizione dove, in realtà, non esisteva, concludendo poi di aver dimostrato il quinto postulato di Euclide. Nel 1733 pubblicò un libro sui suoi studi, intitolato *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclide lavato da ogni macchia) e in quello stesso anno morì.

Nel 1826 il matematico russo Nikolai Ivanovich Lobachevski (1793 – 1856) elaborò i teoremi della *geometria acuta*, come aveva fatto Saccheri un secolo prima, e nel 1829 pubblicò i suoi studi su un periodico locale con un articolo intitolato *Dei principii della geometria*. Ma poiché egli lavorava all'università di Kazan, sperduta nella Russia provinciale, il suo lavoro passò praticamente inosservato.

Intanto un matematico ungherese, Janos Bolyai (1802 – 1860), si dedicava alle stesse ricerche e nel 1831 il padre di Bolyai pubblicò un libro sulla matematica. Il giovane Bolyai convinse suo padre ad aggiungervi un'appendice di ventisei pagine, dove erano descritti i principii della *geometria* *acuta*. Generalmente si attribuisce sia a Lobachevski che a Bolyai il merito di aver scoperto la geometria non-euclidea.

Mentre la *geometria acuta* aveva trovato così la sua formulazione, la *geometria ottusa* invece era stata stroncata dal Saccheri che aveva trovato una contraddizione nella sua formulazione. Tale contraddizione derivava dal secondo postulato di Euclide, il quale afferma che una retta può essere prolungata indefinitamente.

Il matematico tedesco Georg F. B. Riemann (1826 – 1866), compiendo una rottura ancora più radicale con Euclide, formulò l'ipotesi che ogni retta avesse una lunghezza massima finita. In tal caso tutte le contraddizioni della *geometria ottusa* sparivano e si aveva una seconda forma di geometria non-euclidea.

Si hanno così tre tipi di geometria che possono essere enunciati in diversi modi fra loro equivalenti:

1. **Geometria acuta** (non-euclidea): la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180°, ovvero da un punto esterno a una data retta si possono condurre un numero infinito di parallele a tale retta.
2. **Geometria dell'angolo retto** (euclidea): la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180°, ovvero da un punto esterno a una data retta si può condurre una e soltanto una parallela a tale retta.
3. **Geometria ottusa** (non-euclidea): la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180°, ovvero da un punto esterno a una data retta non si possono condurre parallele a tale retta.

Ciascuna di tali geometrie è internamente coerente, ma incoerente rispetto alle altre. Si tratta ora di verificare quale delle tre geometrie suddette corrisponde alle proprietà reali dell'universo.

Diciamo *geodetica* la minima distanza tra due punti. Se tali punti si trovano su un piano, la geodetica è una linea retta, ma se pensiamo i due punti disposti sulla Terra, supposta di forma perfettamente sferica e senza rilievi, allora la geodetica è una linea curva che corrisponde all'arco di un cerchio massimo (equatore e meridiani sono quindi geodetiche). Ciò significa che non è possibile tracciare alcuna geodetica parallela a una geodetica data e passante per un punto a essa esterno. Inoltre un triangolo avente per lati archi di cerchi massimi, cioè geodetiche, ha la somma degli angoli interni maggiore di 180°

La *geometria ottusa* può quindi essere detta anche *geometria della sfera*, mentre la *geometria euclidea dell'angolo retto* può essere detta *geometria del piano*.

Nel 1865 Eugenio Beltrami (1835 – 1900) considerò una particolare forma geometrica, detta *pseudosfera*, le cui geodetiche rispondono alle esigenze della *geometria acuta*. Esse sono di lunghezza infinita ed è possibile tracciare, per un punto esterno a una geodetica data, un numero infinito di geodetiche che non intersecano quella data e sono quindi a essa parallele. La *geometria acuta* può essere quindi detta anche *geometria della pseudosfera*.

Da quanto detto si può affermare che la geometria piana è una parte ristretta della geometria della sfera, poiché il piano non è altro che la superficie di una sfera di raggio infinito.

Nel 1916, infine, Albert Einstein (1879 – 1955) elaborò la *Teoria generale della relatività* e trovò che per spiegare il fenomeno della gravitazione universale si doveva supporre un universo nel quale la luce viaggiasse su geodetiche non-euclidee. Secondo la teoria di Einstein l'universo è un esempio di *geometria ottusa*. Si può dunque concludere che la geometria euclidea – lungi dall'essere la verità eterna e assoluta che per duemila anni si è ritenuto che fosse – è soltanto la geometria del piano, estremmente ristretta e astratta, una approssimazione cioè della geometria reale della Terra e dell'Universo.